M 158

MINISTERE DE L'INDUSTRIE ET DE LA RECHERCHE

ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1978

EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

N.B. - Les candidats doivent traiter le problème I et le problème II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées.

Tables numériques et autres documentations interdites.

Règle à calcul autorisée.

PROBLEME I

I - Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction réelle f_n sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout élément x de $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

et on désigne par C_n sa courbe représentative.

1) Etudier les fonctions f_n au voisinage de $x = 0$ (valeur de la fonction, tangente à C_n, position de C_n par rapport à la tangente).

2) Etudier les branches infinies des courbes C_n.

3) Etudier les variations des différentes fonctions f_n. (Donner les différents tableaux de variation).

4) Etudier les points d'inflexion des courbes C_n.

5) n_1 et n_2 étant deux entiers quelconques, $(n_1 > n_2)$ préciser les points communs à C_{n_1} et C_{n_2} et la position relative des courbes C_{n_1} et C_{n_2}.

6) Tracer sur un même repère les différents modèles des courbes C_n (on pourra envisager C_0, C_1, C_2, C_3).

7) Montrer que les maximums des courbes C_n sont sur une courbe Γ dont on donnera l'équation et que l'on construira sur le repère précédent.

II - 1) Calculer l'aire A du domaine défini par :

$$x \in [\,0,1\,]$$
$$y \in [\,f_2(x)\,;\,f_1(x)\,]$$

2) Montrer, sans la calculer, que pour tout entier naturel n, l'intégrale généralisée :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

est définie.

3) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et en déduire I_n en fonction de n.

III - On suppose désormais que n est non nul.

1) Montrer que la dérivée d'ordre k, $(k \leqslant n)$, de la fonction f_n est de la forme :

$$f_n^{(k)}(x) = e^{-x} \sum_{i=0}^{i=k} a_{n-i}\, x^{n-i}$$

On ne demande pas d'expliciter la suite des réels a_{n-i} mais seulement les réels a_n et a_{n-k}.

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée :

$$J_k = \int_0^{+\infty} f_n^{(k)}(x)\,dx$$

2) On pose :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}\, x^{n-i}$$

a) En utilisant des intégrations par parties montrer l'existence et calculer selon les valeurs de l'entier naturel p, $(p \leqslant n)$, l'intégrale généralisée :

$$K_p = \int_0^{+\infty} x^p\, P_n(x)\, e^{-x}\,dx$$

b) En déduire l'existence et la valeur, pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n, m), de l'intégrale généralisée :

$$L_{(n,m)} = \int_0^{+\infty} P_n(x).P_m(x)\, e^{-x}\,dx$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail